Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№2**

**«Численное решение нелинейных уравнений и систем»**

по дисциплине «Вычислительная математика**»**

Вариант: **2**

**Преподаватель:**   
Малышева Татьяна Алексеевна

**Выполнил:**

Барсуков Максим Андреевич

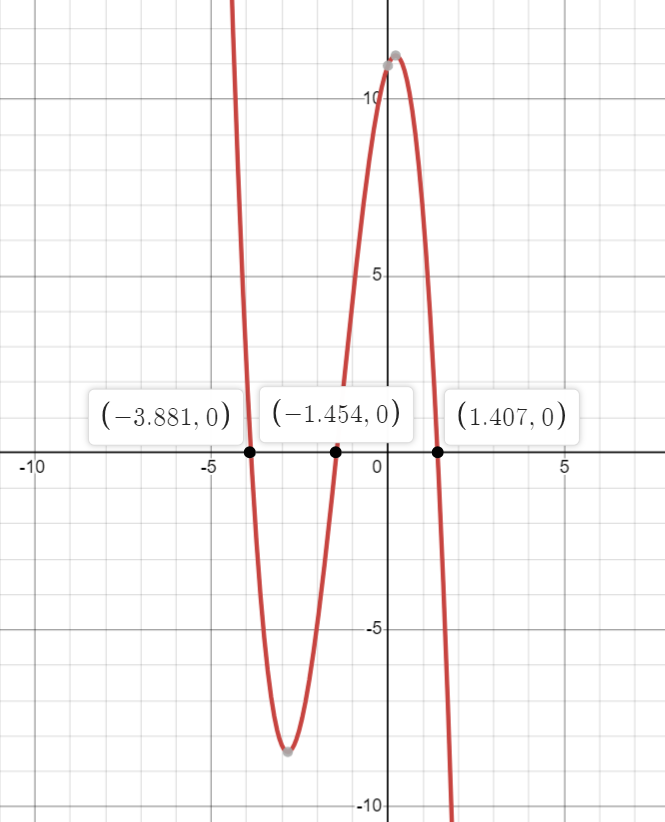
**Группа:** Р3215

Санкт-Петербург, 2024 г.

Цель работы: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

# 1. Вычислительная реализация задачи

# 1. Решение нелинейного уравнения



Для определения интервалов изоляции корней данного уравнения, можно воспользоваться методом интервалов знакопеременности. Для этого нужно найти значения функции на различных интервалах и определить знак функции на каждом из них.  
  
Получим приближенные значения корней:  
x ≈ -3.9, x ≈ -1.5, x ≈ 1.4

Теперь нужно разбить ось x на 4 интервала: (-∞, -3.9), (-3.9, -1.5), (-1.5, 1.4) и (1.4, +∞). На каждом из этих интервалов нужно определить знак функции.

Для этого можем вычислить значения функции в произвольной точке каждого интервала. Например, для интервала (-∞, -3.9) можно выбрать x = -4, для интервала (-3.9, -1.5) x = -2, для интервала (-1.5, 1.4) x = 0, и для интервала (1.4, +∞) x = 2.

Таким образом, получим следующие значения функции:

для x = -4: f(-4) = 2.27

для x = -2: f(-2) = -4.83

для x = 0: f(0) = 10.95

для x = 2: f(2) = -16.63

Знаки функции на каждом интервале будут соответственно:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| (-∞, -3.9) | (-3.9, -1.5) | (-1.5, 1.4) | (1.4, +∞) |
| + | - | + | - |

Таким образом, мы получаем два интервала изоляции корней уравнения:

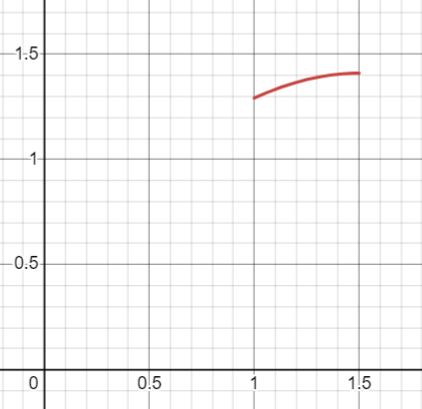
(-4, -1.5), (-1.5, 1) и (1, 1.5).

x1 ≈

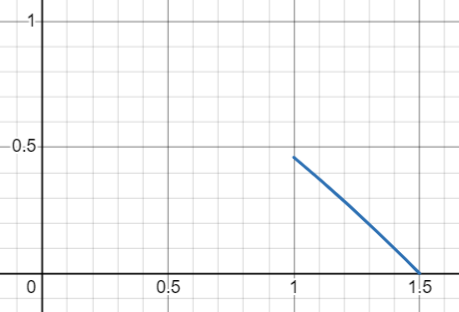
x2 ≈

x3 ≈

Крайний правый корень – **Метод простой итерации**



sПроверка **условия сходимости** метода на выбранном интервале:

На отрезке начального приближения [1, 1.5] функция определена, непрерывна и дифференцируема.

**итерационная последовательность сходится,** скорость сходимости высокая, критерий окончания итерационного процесса , x0 = 1.5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | xk | xk+1 | f(xk+1) | │ xk+1- xk│ |
| 1 | 1.500 | 1.411 | -0.091 | 0.089 |
| 2 | 1.411 | 1.40704 | -0.00834798 | 0.00396 |
| 3 | 1.40704 | 1.40668 | -0.000833168 | 0.00036 |
| 4 | 1.40668 | **1.40664** | 0.00000163104 | 0.00004 |

Крайний левый корень – **Метод хорд**

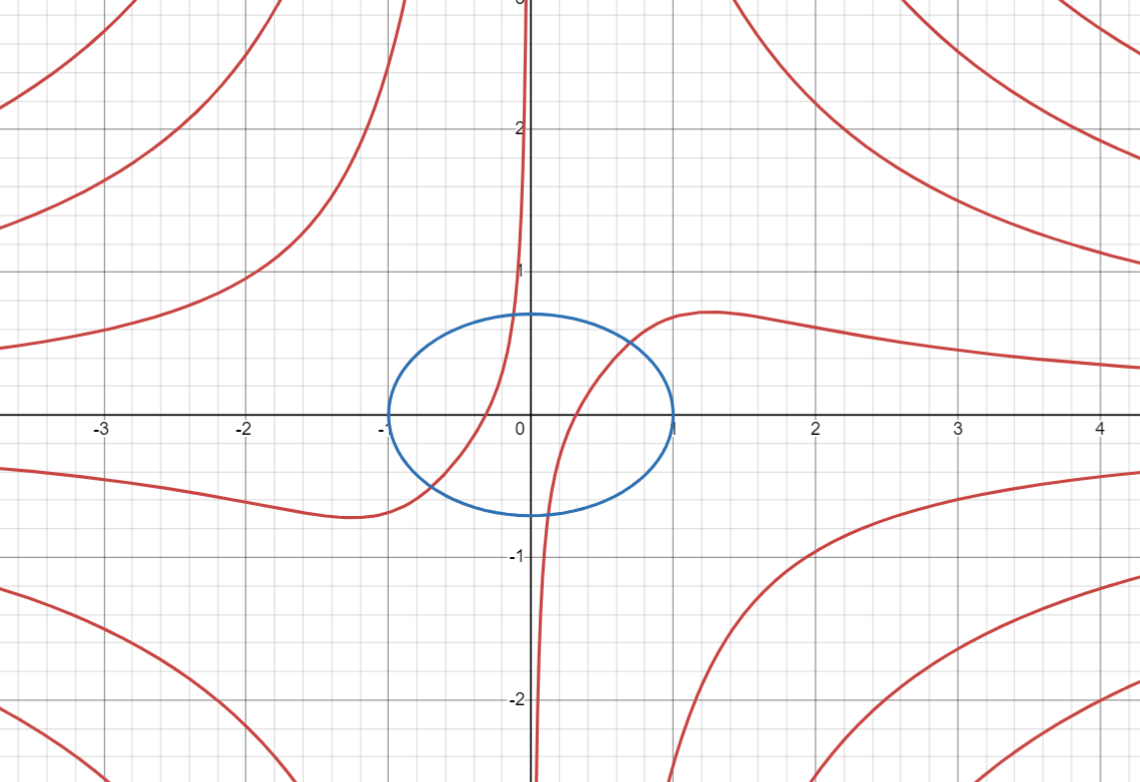
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | a | b | x | f(a) | f(b) | f(x) | |xk+1 - xk| |
| 1 | -4.000 | -1.908 | -3.254 | 2.270 | -4.098 | -7.253 | 1.346 |
| 2 | -4.000 | -3.254 | -3.822 | 2.270 | -7.253 | -0.996 | 0.568 |
| 3 | -4.000 | -3.822 | -3.876 | 2.270 | -0.996 | -0.072 | 0.054 |
| 4 | -4.000 | -3.876 | **-3.880** | 2.270 | -0.072 | -0.005 | 0.004 |

Центральный корень – **Метод половинного деления**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | a | b | x | f(a) | f(b) | f(x) | |a – b| |
| 1 | -1.500 | 1.000 | -0.250 | -0.443 | 6.720 | 9.990 | 2.500 |
| 2 | -1.500 | -0.250 | -0.875 | -0.443 | 9.990 | 5.476 | 1.250 |
| 3 | -1.500 | -0.875 | -1.188 | -0.443 | 5.476 | 2.566 | 0.625 |
| 4 | -1.500 | -1.188 | -1.344 | -0.443 | 2.566 | 1.058 | 0.312 |
| 5 | -1.500 | -1.344 | -1.422 | -0.443 | 1.058 | 0.305 | 0.156 |
| 6 | -1.500 | -1.422 | -1.461 | -0.443 | 0.305 | -0.070 | 0.078 |
| 7 | -1.461 | -1.422 | -1.441 | -0.070 | 0.305 | 0.117 | 0.039 |
| 8 | -1.461 | -1.441 | -1.451 | -0.070 | 0.117 | 0.024 | 0.020 |
| 9 | -1.461 | -1.451 | **-1.456** | -0.070 | 0.024 | -0.023 | 0.010 |

# 2. Решение системы нелинейных уравнений

1. , Метод Ньютона



Отметим, что решение системы уравнений являются точки пересечения эллипса и , следовательно, система имеет не более четырех различных решений.

Построим матрицу Якоби:

*, , ,*

**Корень 1:** Шаг 1: Выбираем

Шаг 2. Решаем полученную систему.

Шаг 3. Вычисляем очередные приближения:

,

, ответ найден, **корень 1**: ()

Аналогично находим **другой корень**:

Из графического решения, корни симметричны, следовательно, **другие 2 корня**

# 2. Программная реализация задачи

[**https://github.com/maxbarsukov/itmo/tree/master/4%20%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%BC%D0%B0%D1%82/%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5/lab2**](https://github.com/maxbarsukov/itmo/tree/master/4%20%D0%B2%D1%8B%D1%87%D0%BC%D0%B0%D1%82/%D0%BB%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5/lab2)

****

**Результаты выполнения программы при различных исходных данных:**

|  |
| --- |
| Выберите тип программы:  1: Нелинейное уравнение  2: Система нелинейных уравнений  3: Выход  Введите номер типа: 1  Выберите уравнение:  1: -1.38\*x^3 - 5.42\*x^2 + 2.57\*x + 10.95  2: x^3 - 1.89\*x^2 - 2\*x + 1.76  3: x/2 - 2\*(x + 2.39)^(1/3)  4: -x/2 + e^x + 5\*sin(x)  Введите номер уравнения: 1  Выберите метод:  1: Метод половинного деления  2: Метод хорд  3: Метод простой итерации  4: Метод Ньютона  Введите номер метода: 2  Введите имя файла для загрузки исходных данных и интервала или пустую строку, чтобы ввести вручную:  Введите левую границу интервала: -4  Введите правую границу интервала: -1.5  Введите погрешность вычисления: 0.000001  Введите имя файла для вывода результата или пустую строку, чтобы вывести в консоль:  Процесс решения:  1: a = -4.000, b = -1.908, x = -3.254, f(a) = 2.270, f(b) = -4.098, f(x)=-7.253338075903418, |x\_k+1 - x\_k| = 1.3463753767240685  2: a = -4.000, b = -3.254, x = -3.822, f(a) = 2.270, f(b) = -7.253, f(x)=-0.9961797791033895, |x\_k+1 - x\_k| = 0.568022551124693  3: a = -4.000, b = -3.822, x = -3.876, f(a) = 2.270, f(b) = -0.996, f(x)=-0.07183806668107628, |x\_k+1 - x\_k| = 0.05421895603697724  4: a = -4.000, b = -3.876, x = -3.880, f(a) = 2.270, f(b) = -0.072, f(x)=-0.004903874657289364, |x\_k+1 - x\_k| = 0.0037899812480461925  5: a = -4.000, b = -3.880, x = -3.880, f(a) = 2.270, f(b) = -0.005, f(x)=-0.0003334833824535366, |x\_k+1 - x\_k| = 0.0002581574086821803  6: a = -4.000, b = -3.880, x = -3.881, f(a) = 2.270, f(b) = -0.000, f(x)=-2.267235988462346e-05, |x\_k+1 - x\_k| = 1.7553172981354948e-05  7: a = -4.000, b = -3.881, x = -3.881, f(a) = 2.270, f(b) = -0.000, f(x)=-1.541386730252725e-06, |x\_k+1 - x\_k| = 1.1933664496588392e-06  8: a = -4.000, b = -3.881, x = -3.881, f(a) = 2.270, f(b) = -0.000, f(x)=-1.047914928165028e-07, |x\_k+1 - x\_k| = 8.113129679188091e-08  Результат:  Найденный корень уравнения: -3.880518  Значение функции в корне: -1.047914928165028e-07  Число итераций: 8  Еще раз? [y/n] |
| Выберите тип программы:  1: Нелинейное уравнение  2: Система нелинейных уравнений  3: Выход  Введите номер типа: 2  Выберите систему уравнений:  1: x^2 + y^2 - 1, x^2 - y - 0.5  Введите номер системы: 1  Введите начальные приближения x0, y0: 0 0  Введите погрешность вычисления: 0.01  0. x1=1.0, x2=-0.5, xnext=(1.0, -0.5), |xk+1 - xk|=1.118033988749895  1. x1=0.8660254037844386, x2=0.5, xnext=(0.8660254037844386, 0.5), |xk+1 - xk|=1.0089346819448337  2. x1=0.8660254037844386, x2=0.2499999999999999, xnext=(0.8660254037844386, 0.2499999999999999), |xk+1 - xk|=0.2500000000000001  3. x1=0.9682458365518543, x2=0.2499999999999999, xnext=(0.9682458365518543, 0.2499999999999999), |xk+1 - xk|=0.10222043276741566  4. x1=0.9682458365518543, x2=0.4375000000000001, xnext=(0.9682458365518543, 0.4375000000000001), |xk+1 - xk|=0.18750000000000022  5. x1=0.8992184106211348, x2=0.4375000000000001, xnext=(0.8992184106211348, 0.4375000000000001), |xk+1 - xk|=0.06902742593071942  6. x1=0.8992184106211348, x2=0.3085937499999999, xnext=(0.8992184106211348, 0.3085937499999999), |xk+1 - xk|=0.12890625000000022  7. x1=0.9511939326241193, x2=0.3085937499999999, xnext=(0.9511939326241193, 0.3085937499999999), |xk+1 - xk|=0.0519755220029845  8. x1=0.9511939326241193, x2=0.4047698974609377, xnext=(0.9511939326241193, 0.4047698974609377), |xk+1 - xk|=0.09617614746093783  9. x1=0.9144185748930639, x2=0.4047698974609377, xnext=(0.9144185748930639, 0.4047698974609377), |xk+1 - xk|=0.03677535773105545  10. x1=0.9144185748930639, x2=0.3361613301094619, xnext=(0.9144185748930639, 0.3361613301094619), |xk+1 - xk|=0.0686085673514758  11. x1=0.9418044171371449, x2=0.3361613301094619, xnext=(0.9418044171371449, 0.3361613301094619), |xk+1 - xk|=0.027385842244081027  12. x1=0.9418044171371449, x2=0.38699556013903724, xnext=(0.9418044171371449, 0.38699556013903724), |xk+1 - xk|=0.05083423002957532  13. x1=0.9220815779705572, x2=0.38699556013903724, xnext=(0.9220815779705572, 0.38699556013903724), |xk+1 - xk|=0.01972283916658768  14. x1=0.9220815779705572, x2=0.3502344364326728, xnext=(0.9220815779705572, 0.3502344364326728), |xk+1 - xk|=0.03676112370636442  15. x1=0.936662073288274, x2=0.3502344364326728, xnext=(0.936662073288274, 0.3502344364326728), |xk+1 - xk|=0.014580495317716768  16. x1=0.936662073288274, x2=0.3773358395366879, xnext=(0.936662073288274, 0.3773358395366879), |xk+1 - xk|=0.027101403104015098  17. x1=0.9260764893901275, x2=0.3773358395366879, xnext=(0.9260764893901275, 0.3773358395366879), |xk+1 - xk|=0.010585583898146456  18. x1=0.9260764893901275, x2=0.35761766420114305, xnext=(0.9260764893901275, 0.35761766420114305), |xk+1 - xk|=0.019718175335544874  19. x1=0.9338680882497905, x2=0.35761766420114305, xnext=(0.9338680882497905, 0.35761766420114305), |xk+1 - xk|=0.007791598859662963  20. x1=0.9338680882497905, x2=0.3721096062513185, xnext=(0.9338680882497905, 0.3721096062513185), |xk+1 - xk|=0.014491942050175455  21. x1=0.9281887959545131, x2=0.3721096062513185, xnext=(0.9281887959545131, 0.3721096062513185), |xk+1 - xk|=0.005679292295277416  22. x1=0.9281887959545131, x2=0.3615344409354887, xnext=(0.9281887959545131, 0.3615344409354887), |xk+1 - xk|=0.010575165315829804  Неизвестные: x = 0.92819, y = 0.36153  Количество итераций: 22  Невязка: -0.0077584070819749495, 0.0 |

# Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений с использованием Python. В результате работы были найдены корни заданных уравнений и систем с использованием различных численных методов, а также были построены графики функций для полного представления исследуемых интервалов.